Ταυτότητα Βαντερμόντε

Να δειχθεί ότι:

$$\binom{n+m}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i}\binom{m}{r-i}$$

όπου $r \in \{0, ..., min(n,m)\}$

Απόδειξη:

Έστω $m \le n$

$$\sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} x^i = (x+1)^{n+m} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} \binom{n}{i}\binom{m}{j} x^{i+j} =$$

$$\begin{aligned}
&+\binom{n}{0}\binom{m}{0}x^0 + \binom{n}{0}\binom{m}{1}x^1 + \binom{n}{0}\binom{m}{2}x^2 + \ldots + \binom{n}{0}\binom{m}{m}x^m \\
&+\binom{n}{1}\binom{m}{0}x^1 + \binom{n}{1}\binom{m}{1}x^2 + \binom{n}{1}\binom{m}{2}x^3 + \ldots + \binom{n}{1}\binom{m}{m}x^{m+1} \\
&+\binom{n}{2}\binom{m}{0}x^2 + \binom{n}{2}\binom{m}{1}x^3 + \binom{n}{2}\binom{m}{2}x^4 + \ldots + \binom{n}{2}\binom{m}{m}x^{m+2} \\
&+\vdots \\
&+\binom{n}{m}\binom{m}{0}x^m + \binom{n}{m}\binom{m}{1}x^{m+1} + \binom{n}{m}\binom{m}{2}x^{m+2} + \ldots + \binom{n}{m}\binom{m}{m}x^{2m} \\
&+\binom{n}{m+1}\binom{m}{0}x^{m+1} + \binom{n}{m+1}\binom{m}{1}x^{m+2} + \binom{n}{m+1}\binom{m}{2}x^{m+3} + \ldots + \binom{n}{m+1}\binom{m}{m}x^{2m+1} \\
&+\vdots \\
&+\binom{n}{2m}\binom{m}{0}x^{2m} + \binom{n}{2m}\binom{m}{1}x^{2m+1} + \binom{n}{2m}\binom{m}{2}x^{2m+2} + \ldots + \binom{n}{2m}\binom{m}{m}x^{3m} \\
&+\binom{n}{2m+1}\binom{m}{0}x^{2m+1} + \binom{n}{2m+1}\binom{m}{1}x^{2m+2} + \binom{n}{2m+1}\binom{m}{2}x^{2m+3} + \ldots + \binom{n}{2m+1}\binom{m}{m}x^{3m+1} \\
&+\vdots \\
&+\binom{n}{n}\binom{m}{0}x^n + \binom{n}{n}\binom{m}{1}x^{n+1} + \binom{n}{n}\binom{m}{2}x^{n+2} + \ldots + \binom{n}{n}\binom{m}{m}x^{n+m}
\end{aligned}$$

$$\sum_{i=0}^{n+m} \binom{n+m}{i} x^i = \sum_{r=0}^{m} \left(x^r \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i} \binom{m}{r-i} \right) + \sum_{r=m+1}^{2m} \left(x^r \sum_{i=0}^{2m-r} \binom{n}{r-m+i} \binom{m}{i} \right) + \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{i} \binom{m}{j} x^{i+j}$$

Λόγω της παραπάνω ισότητας πολυωνύμων, οι συντελεστές των αντίστοχων μονωνυμικών όρων είναι ίσοι, επομένως

$$\forall r \in \{0, ..., m\} \binom{n+m}{r} = \sum_{i=0}^{r} \binom{n}{i} \binom{m}{r-i}$$